LA PREGUNTA COMO MÓVIL DE LA CONJETURACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

Verónica Molfino - Mario Dalcín
Departamento de Matemática de Formación Docente-Instituto de Profesores Artigas, Uruguay
veromolfino@gmail.com, mdalcin00@gmail.com

Nivel educativo: Medio – Formación docente
Palabras clave: conjetura, demostración, geometría

Resumen

A partir del trabajo en ciertas actividades geométricas se busca generar las condiciones para que el participante establezca relaciones entre la ubicación de ciertos puntos notables del triángulo (circuncentro, ortocentro e incentro), la medida de ciertos ángulos con vértices en dichos puntos notables y una clasificación de los triángulos según sus ángulos. También se busca que los participantes formulen conjeturas en torno a los ángulos de vértices en dichos puntos notables y elaboren pruebas para las mismas. Se promoverá la reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de la formulación de conjeturas, argumentación, refutación, demostración, construcción y deducción, como procesos cognitivos propios del trabajo en geometría en el nivel medio y en la formación de profesores. Las actividades se pueden realizar trabajando tanto en lápiz y papel como en un ambiente dinámico.

Introducción

Tradicionalmente los textos de geometría han presentado la concurrencia de mediatrices, bisectrices, alturas y medianas de un triángulo en circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro como hechos puntuales, sin vínculo con otros conceptos geométricos. La excepción quizás esté dada por la recta de Euler, donde sí es posible apreciar la alineación de ortocentro, baricentro y circuncentro y la relación de distancias que los vinculan.

En este minicurso proponemos actividades que promuevan la reflexión sobre otras relaciones que se pueden establecer entre dichos centros, así como su relación con otros conceptos geométricos. La formulación de conjeturas y su justificación es uno de los objetivos principales del minicurso, utilizando un contexto específico dentro de la geometría para propiciar dichos procesos cognitivos.

Por otro lado, se desea instaurar una discusión entre los asistentes al minicurso sobre las implicancias que puede tener sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría este tipo de actividades, donde la pregunta se presenta como principal móvil para la formulación de conjeturas y su justificación.

Prerrequisitos

Conocimiento de conceptos y procedimientos geométricos básicos.

Objetivos

Buscamos aquí establecer conexiones entre los puntos notables del triángulo más transitados en la enseñanza media (circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro) y en los textos usados en enseñanza media y otros conceptos geométricos, así como vincular a estos mismos puntos mediante cierta relación angular.

En la medida que el minicurso está dirigido a estudiantes de profesorado de matemática y profesores de matemática en ejercicio, además de plantear un posible tratamiento alternativo para los conceptos geométricos mencionados, también busca reflexionar acerca de esta forma de trabajo, diferente a la que se puede encontrar en los libros de texto donde el conocimiento es presentado como un saber acabado. Dicha metodología implica la formulación de conjeturas y el ‘hacerse cargo’ de las mismas mediante la elaboración de justificaciones que permitan confirmarlas o refutarlas.

Contenido

Presentamos un conjunto de actividades mediante las cuales buscamos poner en discusión posibles nuevos vínculos entre algunos conceptos frecuentemente tratados en el ámbito de la geometría. Buscamos además visualizar una misma situación -originada en la geometría- en el ámbito algebraico y de la representación gráfica.

Actividades

Las actividades que siguen pueden ser abordadas trabajando en lápiz y papel o haciendo uso de algún software de Geometría Dinámica.

En todas las actividades que siguen los triángulos ABC se considerarán con A y B fijos y en sentido antihorario.

Actividad 1

Construye un triángulo ABC y su circuncentro O.

i) ¿Hay alguna relación entre las medidas de los ángulos ACB y AOB? ¿Cómo lo probarías?

ii) Representa gráficamente la medida del ángulo AOB en función de la medida del ángulo ACB.

Actividad 2

i) Construye un triángulo ABC y su circuncentro O.

¿Puede el circuncentro a) ser interior al triángulo?

b) pertenecer a un lado del triángulo?

c) ser exterior al triángulo?

ii) ¿Qué condiciones debe cumplir el triángulo ABC para que O sea

a) interior,

b) pertenezca a un lado,

c) exterior? Fundamenta.

iii) ¿Son válidas las afirmaciones recíprocas a las formuladas en ii)? Fundamenta.

Actividad 3

O es el circuncentro de ABC.

i) ¿Qué condición(es) debe cumplir el triángulo ABC para que O y C pertenezcan al mismo semiplano de borde AB (sin incluir el borde)?

ii) Representa la zona del plano donde debe estar C para que O y C pertenezcan al mismo semiplano de borde AB.

Actividad 4

i) Construye un triángulo ABC y su ortocentro H.

¿Puede el ortocentro a) ser interior al triángulo?

b) pertenecer a un lado del triángulo?

c) ser exterior al triángulo?

ii) ¿Qué condiciones debe cumplir el triángulo ABC para que H sea

a) interior,

b) pertenezca a un lado,

c) exterior? Fundamenta.

iii) ¿Son válidas las afirmaciones recíprocas a las formuladas en ii)? Fundamenta.

Actividad 5

Construye un triángulo ABC y su ortocentro H.

i) ¿Hay alguna relación entre las medidas de los ángulos ACB y AHB? Demuestra.

ii) Representa gráficamente la medida del ángulo AHB en función de la medida del ángulo ACB.

Actividad 6

O y H son circuncentro y ortocentro respectivamente de ABC.

i) ¿Qué condición(es) debe cumplir el triángulo ABC para que O y H pertenezcan al mismo semiplano de borde AB?

ii) Representa la zona del plano donde debe estar C para que O y H pertenezcan al mismo semiplano de borde AB.

Actividad 7

i) I incentro de (ABC). Si BIC = 125º, ¿cuál es la medida de CAB?

ii) I incentro de (ABC). Si ACB = 100º, ¿cuánto mide AIB?

iii) Construye un triángulo ABC y su incentro I.

¿Hay alguna relación entre las medidas de los ángulos ACB y AIB? Fundamenta.

iv) Representa gráficamente la medida del ángulo AIB en función de la medida del ángulo ACB.

Actividad 8

I es el incentro de ABC.

i) ¿Qué condición(es) debe cumplir el triángulo ABC para que I y C pertenezcan al mismo semiplano de borde AB?

ii) Representa la zona del plano donde debe estar C para que I y C pertenezcan al mismo semiplano de borde AB.

Actividad 9

i) ¿Qué condición(es) debe cumplir el triángulo ABC para que O, H, I y C pertenezcan al mismo semiplano de borde AB?

ii) Representa la zona del plano donde debe estar C para que O, H, I y C pertenezcan al mismo semiplano de borde AB.

Actividad 10

Para los casos en que O, H, I y C pertenecen al mismo semiplano de borde AB ¿puedes establecer una relación que vincule simultáneamente las medidas de los ángulos AOB, AHB y AIB? Explica.

Actividad 11

Para los casos en que O, H, I y C pertenecen al mismo semiplano de borde AB ordena los ángulos AOB, AHB y AIB de menor a mayor indicando la(s) condición(es) que cumple el triángulo ABC en cada caso. Justifica ampliamente tu respuesta.

Actividad 12

G es el baricentro del triángulo ABC.

i) ¿Hay alguna relación entre las medidas de los ángulos AGB y AOB? Justifica tu respuesta.

b) ¿Puedes comparar el ángulo AGB con los ángulos AOB, AHB y AIB? Justifica tu respuesta.

Modalidad de trabajo

En las 3 horas del minicurso se plantearán las actividades una a una, o sea, cada nueva actividad se planteará luego de finalizada la anterior. Se buscará que los participantes trabajen en parejas. Los responsables del minicurso responderán las consultas que puedan plantear cada una de estas parejas al abordar las actividades. Al finalizar las actividades, y en base a las resoluciones elaboradas por los participantes, los moderadores haremos una reseña de las formas de resolución de las mismas.

Bibliografía

- Battista, M. T. y Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *The Mathematics Teacher*, Vol. 88, nº1, pp. 48-54.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, pp. 15-30.
- De Villiers, M. (1996). Why proof in Dynamic Geometry? *Slightly edited version of invited letter in a special Forum in Mathematics in College*, 40-41, June. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html
- Dreyfus, T. y Hadas, N. (1996). Proof as answer to the question why. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 28, nº 1, pp. 1-5.
- Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* (Software de Geometría Dinámica). Emeryville, CA, U.S.A.: Key Curriculum Press.
- Mason, J.; Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona, España: M.E.C. y Labor.